**مبرهنة (14)**

ليكن الفضاء شعاعياً منتهي البعد على حقل $k$. وليكن $e=(e_1,\dots,e_n)$ أساساً لهذا الفضاء.
ولتكن $P=(P_{ij})$ مصفوفة من الفضاء $M_n(K)$. عندئذٍ تُكون جملة الأشعة $f=(f_1,\dots,f_n)$
حيث $f_j=\sum_{i=1}^{n}P_{ij}.e_i$ أساساً للفضاء $E$ إذا وفقط وإذا كانت المصفوفة $P=(P_{ij})$ قابلة للقلب.

**الإثبات:**

ليكن $u$ التطبيق الخطي في $L(E)$ المعرف كما يلي $u(e_j)=f_j \quad ;\forall j\in\mathbb{N}_n$ عندئذٍ
$P=Mat_e(u)$ وبالتالي:
$f$ أساس لـ $E \Leftrightarrow f$ تولد $E \Leftrightarrow \left(n=rg(u)\right) \Leftrightarrow \left(n=rg(P)\right) \Leftrightarrow P$ قلوبة

**مبرهنة (15)**

ليكن $E$ فضاءً شعاعياً منتهي البعد على حقل $K$. ليكن $x\in E$. ولتكن $f,e$ أساسين لـ $E$.
لتكن $X=Mat_e(x), X'=Mat_f(x)$ عندئذٍ: $X=P_e^f X'$.

**الإثبات:**

$$\forall x\in E \quad ;\exists(\alpha_1\dots\alpha_n)\in K^n; \quad x=\alpha_n e_n=\sum_{i=1n}^{n}\alpha_i e_i$$

$$\forall\, x\in E \quad ;\exists(\beta_1\dots,\beta_n)\in K^n; x=\beta_1 f_1+\dots+\beta_n f_n=\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j$$

حيث:

$$X=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \quad , \quad X'=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

ولكن $f_j=\sum_{i=1}^{n}p_{ij}e_i \quad \forall j\in\mathbb{N}_n;$ وبالتالي $x=\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j=\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left(\sum_{i=1}^{n}P_{ij}.e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}\beta_j\right)e_i$

ولكن $x=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e_i$ إذن $\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}P_{ij}.\beta_j).e_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i.e_i$ أي أن $\forall i\in\mathbb{N}_n, \alpha_i=\sum_{j=1}^{n}p_{ij}\beta_j$

و نستنتج أن $X=P_e^f X'$.

## مثال

ليكن $E=\mathbb{R}^2$ وليكن لدينا الشعاعين $f_1=(1,2),\quad f_2(1,3)$

a- أثبت أن الجملة $f=(f_1,f_2)$ هي أساس لـ $E=\mathbb{R}^2$.

b- أكتب مصفوفة الانتقال من الأساس القانوني $e=\{(1,0),(0,1)\}$ إلى الأساس $f$.

C- إذا كان $x=(4,1)\in\mathbb{R}^2$. أوجد إحداثيات الشعاع $x$ بالأساس $f=(f_1,f_2)$.

**الحل:**

a- $x=(x_1,x_2)\quad \forall x\in\mathbb{R}^2;$ عندئذٍ نستطيع أن نجد $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ بحيث يكون

$\lambda f_1+\mu f_2=(x_1,x_2)$ أي $\lambda(1,2)+\mu(1,3)=(x_1,x_2)$ إذن $\lambda+\mu=x_1,\quad 2\lambda+3\mu=x_2$

$$\Rightarrow \lambda=x_1-\mu,\quad \lambda=\frac{1}{2}(x_2-3\mu)\Rightarrow 2x_1-2\mu=x_2-3\mu\Rightarrow \mu=x_2-2x_1\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \lambda=x_1-\mu=3x_1-x_2\in\Re$$

إذن $f$ مولدة. وهي حرة لأن إذا كان $\lambda f_1+\mu f_2=0\quad \forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2;$ فإن $\lambda+\mu=0$ و$2\lambda+3\mu=0$ أي أن $\lambda=\mu=0$ إذن $f$ أساس لـ $E$.

b- إن $(f_1,f_2)\in E^2$ إذن $f_1=\lambda e_1+\mu e_2\Rightarrow \lambda(1,0)+\mu(0,1)=(1,2)$ وبالتالي $\lambda=1,\mu=2$ وبنفس الشكل نجد أن $f_2=1e+3e_2=e_1+3e_2$. أي أن

$$P_e^f=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}$$

لاحظ أن:

$$\begin{pmatrix}f_1\\f_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e_1+2e_2\\e_1+3e_2\end{pmatrix}={}^t\begin{pmatrix}1&2\\1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}={}^tP_e^f\begin{pmatrix}e_1\\e_2\end{pmatrix}$$

$${}^tf={}^tP_e^f e\quad\Rightarrow\quad f=eP_e^f$$

C- نلاحظ أن $(4,1)=4(1,0)+(0,1)=4e_1+1e_2=4e_1+e_2$ وبما أن $x=(4,1)\in\mathbb{R}^2$ فإن $(4,1)=\lambda f_1+\mu f_2$ حسب المبرهنة (15) فإنه إذا كان $X=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix},\quad X'=\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}$ فإن

$$X=PX'\Rightarrow\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda\\\mu\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda+\mu=4,\quad 2\lambda+3\mu=1$$

إذن $\lambda=4-\mu\Rightarrow 8-2\mu+3\lambda=1$ وبالتالي $\mu=-7$ ونستنتج أن $\lambda=4-(-7)=11$

إذن إحداثيات $x=(4,1)$ في الأساس $f$ هو الشعاع $X'={}^t(11,-7)$.

## 7. المصفوفات المتشابهة (Similar Matrix)

### تعريف

لتكن $A,B\in M_n(K)$ مصفوفتين مربعتين. نقول عن $A,B$ أنهما متشابهتان إذا وفقط تحقق الشرط التالي $\exists P\in GL_n(K);B=PAP^{-1}$

### ملاحظة

لنرمز للمصفوفات المتشابهة بـ $A\cong B$ عندئذٍ العلاقة $(\cong)$ تُعرف علاقة تكافؤ (أثبت ذلك).

### مبرهنة (16)

إذا كان $E$ فضاء شعاعياً منتهي البعد فوق الحقل $K$. لتكن $A,B$ مصفوفتين مربعتين من $M_n(K)$. إن $B,A$ متشابهتين إذا وفقط إذا وجد التطبيق الخطي $u:E\to F$ و أساسين $e,f$ لـ $E$ حيث $A=Mat_e(u),\quad B=Mat_f(u)$.

### مبرهنة (17)

إذا كانت $B,A$ مصفوفتين مربعتين من $M_n(K)$ ولنفترض أن $A\cong B$ عندئذ الشروط التالية محققة:

1- ${}^tA\cong{}^tB$

2- $Tr(A)=Tr(B)$

3- $\forall\quad k\in\mathbb{N}^*\Rightarrow(A^k\cong B^k)\wedge(A^k=PB^kP^{-1})$

4- إذا كانت $A$ قابلة للقلب فإن $B$ قابلة للقلب و $A^{-1}\cong B^{-1}$.

الإثبات: واضح

## تدريبات

### التمرين الأول

نعرف المصفوفة معدومة القوة إذا وجد عدد $p \in \mathbb{N}^*$ حيث $A^p = 0$ إذا كانت $A$ مصفوفة معدومة القوة. أثبت أن $(I_n - A)$ مصفوفة قلوبة.

**الحل:**

في القسم الثاني من هذا الفصل وجدنا أن:

$$(I_n - A^p) = (I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{p-1})$$

بما أن $A$ معدومة القوة فإنه يوجد $P \in N^*$ حيث $A^p = 0$ ومنه

$$(I_n - 0) = (I_n + A + \cdots + A^{p-1})$$

أي $(I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{p-1}) = I_n$

ومنه المصفوفة $(I_n - A)$ قابلة للقلب ومقلوبها هو المصفوفة

$$(I_n - A)^{-1} = (I_n + A + \cdots + A^{p-1})$$

### التمرين الثاني

ليكن $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ ولتكن $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ مصفوفة من $M_2(\mathbb{R})$ احسب $A^n, A^2$ حيث $\forall n \in \mathbb{N}$

**الحل:**

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ab & a^2 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن المصفوفة $A$ تكتب بالشكل التالي:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$= A_1 + A_2$$

لاحظ أيضاً أن:

$$A_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = o_2$$

وأن:

$$A_2^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^N \end{pmatrix} \quad ; \quad \forall n \in N^*$$

وبالتالي:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*;\quad A^n = (A_1 + A_2)^n = \sum_{k=1}^{n} C_n^k A_1^k A_2^{n-k}$$

$$= C_n^0 A_1^0 A_2^n + C_n^1 A_1\, A_2^{n-1} + C_n^2 A_1^2 + A_2^{n-2} + \cdots$$

$$= C_n^0 A_1^0 A_2^n + C_n^1 A_1\, A_2^{n-1} + 0_2 + \cdots + 0_2$$

$$= A_2^n + nA_1A_2^{n-1} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + n\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 0 & 0^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & a^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ nba^{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ nba^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$$

من أجل $n = 2$ نلاحظ أننا نحصل على $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2ba & 0 \end{pmatrix}$

## التمرين الثالث

نسمي المصفوفة التالية مصفوفة Jordan Matrix $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots\ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

أحسب $J^2$ و استنتج $J^n$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$.

## التمرين الرابع

بين أن المصفوفة التالية قابلة للقلب

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

احسب مقلوب هذه المصفوفة.